Innenwinkelsumme im Dreieck
Übung

1. In Dreiecken mit den Innenwinkeln α, β, γ soll jeweils der fehlende Winkel berechnet werden. Geben Sie an, ob es sich um ein stumpfwinkliges, ein rechtwinkliges oder ein spitzwinkliges Dreieck handelt.

   a) $\alpha = 13°, \beta = 73°, \gamma = ?$ b) $\alpha = ?, \beta = 35°, \gamma = 55°$

   c) $\alpha = 152°, \beta = 64°, \gamma = ?$ d) $\alpha = 46°, \beta = ?, \gamma = 76°$

   e) $\alpha = 8\beta, \beta = ?, \gamma = 9\beta$ f) $\alpha = \beta = ?, \gamma = 90°$

   g) $\alpha = \beta = \gamma = ?$ h) $\alpha = ?, \beta = \frac{1}{6}\alpha, \gamma = \frac{5}{6}\alpha$

2. Begründen Sie, warum ein Dreieck nicht zwei stumpfe Winkel besitzen kann. Begründen Sie auch, warum es kein überstumpfwinkliges Dreieck geben kann.

3. Entscheiden Sie mit Begründung, ob folgende Aussagen wahr (w) oder falsch (f) sind.

   a) In einem gleichschenklig-rechtwinkligen Dreieck sind zwei Winkel genau 45° groß.
   b) In einem Dreieck können nicht mehr als zwei stumpfe Winkel vorkommen.
   c) Es existiert ein Dreieck mit $\alpha = 10°$ und $\gamma = 15°$.
   d) Die Innenwinkelsumme im Viereck beträgt stets 240°.

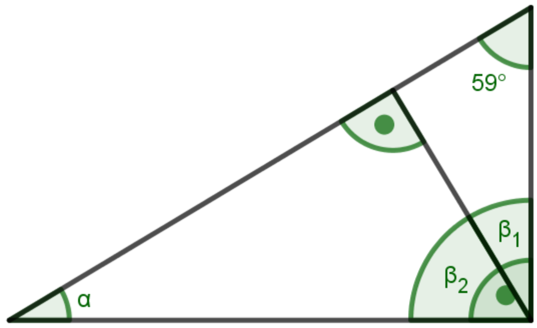
4. In einem Dreieck ist der Innenwinkel β doppelt so groß wie α. Der Winkel γ ist sogar dreimal so groß wie α. Welche Besonderheit besitzt das Dreieck?

5.
   a) Der Winkel an der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks ist 120° groß. Wie ändert er sich, wenn man die Größe der Basiswinkel verdoppelt?
   b) Widerlegen Sie mit Hilfe eines geeigneten Beispiels, dass die folgende Aussage falsch ist:

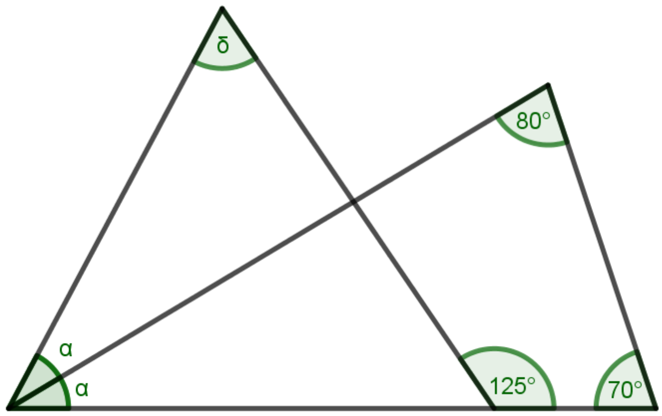
      „Verdoppelt man die Größe der Basiswinkel in einem gleichschenkligen Dreieck, dann halbiert sich die Größe des Winkels an der Spitze".

6. Berechnen Sie die Maße der gesuchten Winkel. Die Skizzen sind nicht maßstabsgetreu.

   a) Berechnen Sie die Maße der Winkel α, β_1 und β_2.



   b) Ermitteln Sie α und δ.



7. Bestimmen Sie mit Hilfe einer Skizze die Innenwinkelsumme im Viereck und Fünfeck. Geben Sie anschließend eine Formel für ein Vieleck mit beliebig vielen, d.h. n Ecken an. Betrachten Sie der Einfachheit halber dafür nur n-Ecke, deren Seiten sich nicht überschneiden.

Innenwinkelsumme im Dreieck
Lösung

1.
   a) $\gamma = 94°$ (stumpfwinklig)
   b) $\alpha = 90°$ (rechtwinklig)
   c) Dreieck nicht möglich, da bereits α und β zusammen größer als 180° sind!
   d) $\beta = 58°$ (spitzwinklig)
   e) $\alpha = 80°, \beta = 10°, \gamma = 90°$ (rechtwinklig)
   f) $\alpha = \beta = 45°$ (hier handelt es sich um ein gleichschenklig-rechtwinkliges Dreieck)
   g) $\alpha = \beta = \gamma = 60°$ (gleichseitiges Dreieck, also spitzwinklig)
   h) $\alpha = 90°, \beta = 15°, \gamma = 75°$ (rechtwinklig)

2. Ein stumpfer Winkel ist ein Winkel zwischen 90° und 180°. Da zwei stumpfe Winkel daher bereits über 180° in Summe ergeben, kann die Winkelsumme im Dreieck von 180° nicht erfüllt werden.
   Ein überstumpfer Winkel ist ein Winkel mit über 180°. Da die Innenwinkel aller drei Innenwinkel im Dreieck jedoch nur eine Summe von 180° besitzen, kann es ein solches Dreieck nicht geben.

3.
   a) w, für die Basiswinkel bleiben zusammen 90° übrig, macht 45° für jeden.
   b) f, zwei stumpfe Winkel sind nicht möglich, da ihre Summe über 180° beträgt.
   c) w, der dritte Winkel β beträgt dann 155°.
   d) f, ein Viereck kann in zwei Dreiecke mit einer Innenwinkelsumme von insgesamt 360° aufgeteilt werden.

4. $\alpha = 30°, \beta = 60°, \gamma = 90°$, das Dreieck ist rechtwinklig.

5.
   a) Ein Basiswinkel ist vorher 30° und wird auf 60° verdoppelt. Der Winkel an der Spitze muss sich demnach von 120° auf 60° halbieren.
   b) Z.B. für $\alpha = 20°$ wird aus dem Winkel an der Spitze aus 140° zu 100°, die Aussage stimmt also nicht im Allgemeinen.

6.
   a) $\beta_1 = 31°,\ \beta_2 = 59°, \alpha = 31°$
   b) $\alpha = 30°, \gamma = 65°$

7. Im Viereck: 360° (Aufteilung in zwei Dreiecke)
Im Fünfeck: 540°
Im n-Eck: $(n - 2) \cdot 180°$